Analysis I - Klausur
FSU Jena

Prof. Carl

WS 06/07 - 20 Februar, 2007

Ohne Hilfsmittel - Zeit : 2 Stunden

I

a) Wie lautet das Prinzip der vollständigen Induktion?

b) Man beweise die Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n = 1, 2, ...$

II. Folgen und Reihen

1

a) Was ist eine Folge?

b) Was ist eine konvergente Zahlenfolge?

c) Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist!

d) Wie lautet der Satz über monotone Konvergenz von Folgen?

2

a) Was ist eine Reihe?

b) Wie lautet das Quotientenkriterium für die Konvergenz einer Reihe?

c) Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ konvergent?
Begründen Sie Ihre Aussage!

III. Stetigkeit

a) Was heißt, dass die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ stetig ist?

b) Was heißt, dass eine Funktion im Punkt $x_0 \in D$ nicht stetig ist? (Negation von Stetigkeit)

c) Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 0$ stetig? Begründen Sie Ihre Aussage!

IV. Differenzierbarkeit

1

a) Was heißt, dass eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist?

b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar?
Begründen Sie ihre Aussage.

2

a) Wie lautet der 1. MWS der Differentialrechnung? Beweisen Sie diesen mit Hilfe des Satzes von Rolle.

b) Man beweise mit Hilfe des 1. MWS die Ungleichung
$\sin x < x$ für $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Man berechne die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

und

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad , \; a, b > 0$$

d) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = a^x, \; a > 0, \; a \neq 1$, auf Monotonie, sowie Konvexität bzw. Konkavität!

3 Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = a^x$ für $a > 0, \; a \neq 1$ in eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$!