Analysis I - Klausur
FSU Jena - WS 05/06
- Lösungen -

Stilianos Louca

February 19, 2007

Aufgabe 1

a) *Siehe Vorlesung*

b) *Siehe Vorlesung*

c) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, in (a, b) differenzierbare Funktionen, mit $g'(x) \neq 0$.

$$Da\ g'(x) \neq 0 \Rightarrow\ g(a) \neq g(b)\ (Satz\ von\ Rolle).$$

$$Sei\ h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

$$\Rightarrow\ h'(x) = f'(x) - g'(x)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$h(a) = f(a),\ h(b) = f(a) \Rightarrow\ \exists\ \xi \in (a, b) : h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0\ (Satz\ von\ Rolle).$$

$$\Rightarrow\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$Zweiter\ Mittelwertsatz\ folgt\ aus\ g(x) := x$$

Aufgabe 2

a) *Siehe Vorlesung*

b) $\mathbb{R}$

Aufgabe 3

Siehe Vorlesung

Aufgabe 4

Siehe Vorlesung

Aufgabe 5

$$\sin x = \Im e^{ix} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

Aufgabe 6

Siehe Vorlesung

Aufgabe 7

Siehe Vorlesung

Aufgabe 8

Siehe Vorlesung

Aufgabe 9

Siehe Vorlesung

Aufgabe 10

$$Induktionsanfang: \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$Induktionsannahme: \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Induktionsschritt: \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = n^2 + 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square$$

Aufgabe 11

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2},\ \forall\ n > 2 : x_n \leq 1 + \frac{2}{2^n} \leq 1 + \frac{2}{8} = \frac{5}{4} < x_2$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}\ Obere\ Schranke\ \Rightarrow\ Supremum$$

$$x_n \geq -1 + \frac{2}{2^n} \geq -1\ \Rightarrow -1\ Untere\ Schranke$$

$$\lim_{n\ ungerade, n\to\infty} x_n = -1 + \lim \frac{2}{2^n} = -1\ \Rightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : x_n < -1 + \varepsilon\ \Rightarrow\ -1\ Infimum$$

Aufgabe 12

$$Konvergent\ : -\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} \cos kx\ \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}\ : Konvergent\ für\ |q| < 1$$

$$\Rightarrow\ Reihe\ Konvergent\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$Grenzwert : \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} \cos kx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^2\right)^k \Re\left[e^{ikx}\right] = \Re\left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(q^2 e^{ix}\right)^k\right] = 1 + \Re\left[\frac{q^2 e^{ix}}{1 - q^2 e^{ix}}\right]$$

$$= 1 + q^2 \frac{\Re\left[e^{ix}\overline{(1 - q^2 e^{ix})}\right]}{\|1 - q^2 e^{ix}\|^2} = 1 + q^2 \frac{\Re\left[e^{ix}\left(1 - q^2 \overline{e^{ix}}\right)\right]}{\|1 - q^2 e^{ix}\|^2} = 1 + q^2 \frac{\Re\left[e^{ix}\left(1 - q^2 e^{-ix}\right)\right]}{\|1 - q^2 e^{ix}\|^2}$$

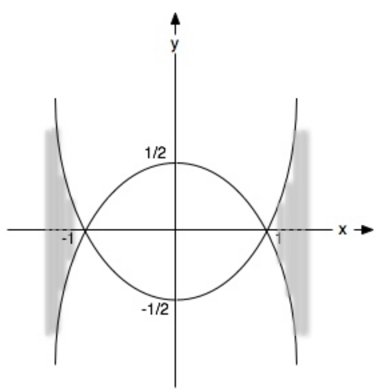
$$= 1 + q^2 \frac{\Re\left[e^{ix} - q^2\right]}{1 - 2q^2 \Re\left[e^{ix}\right] + \|q^2 e^{ix}\|^2} = 1 + q^2 \frac{\cos x - q^2}{1 - 2q^2 \cos x + q^4} = \frac{1 - q^2 \cos x}{1 - 2q^2 \cos x + q^4}$$

Aufgabe 13

$$x^2 - 2|y| > 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 > 2|y| \geq 0 \Rightarrow\ x \in (1, \infty) \cup (-\infty, -1)$$

$$|y| < \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow\ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} < y < \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$



Aufgabe 14

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim \frac{x - \left(\sqrt{a} - \sqrt{x - a}\right)^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{a} - \sqrt{x - a}\right)} = \lim \frac{x - a - x + a + 2\sqrt{a}\sqrt{x - a}}{\sqrt{x - a}\sqrt{x + a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{a} - \sqrt{x - a}\right)}$$

$$= \lim \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{x + a}\left(\sqrt{x} + \sqrt{a} - \sqrt{x - a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Aufgabe 15

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

Aufgabe 16

$$f : Beschränkt \Rightarrow\ \exists\ M := max\left\{max\left\{|f(x)| : x\in[-1,1]\right\},1\right\}>0$$

$$Sei\ \varepsilon>0\ Beliebig. \rightarrow\ \delta := \frac{\varepsilon}{M}>0$$

$$\Rightarrow\ \forall\ x\in[-1,1] : |x-0|\le\delta\ \Rightarrow\ |g(x)-g(0)|=|xf(x)|\le|\delta M|=\varepsilon\quad\square$$

Aufgabe 17

Annahme: $\log x\equiv\ln x$.

$$\int\sqrt{x}\log x\ dx=\frac{2x^{3/2}\log x}{3}-\frac{2}{3}\cdot\int\frac{x^{3/2}}{x}dx=\frac{2x^{3/2}\log x}{3}-\frac{4x^{3/2}}{9}=x^{3/2}\cdot\left(\frac{2\log x}{3}-\frac{4}{9}\right)$$

Im Fall $\log x\equiv\log_{10}x$ einfach das ganze durch $(\ln 10)$ teilen.

Aufgabe 18

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\cdot\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2+1}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left[\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C,\ C : const$$