

Analysis I - Klausur

FSU Jena

A. Weber

WS 05/06 - 28 Februar, 2006

1

- a) Formulieren Sie den Satz von Rolle.
- b) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
- c) Beweisen Sie den Mittelwertsatz mit Hilfe des Satzes von Rolle.

2

- a) Wann heißt eine Menge überabzählbar?
- b) Geben Sie ein Beispiel für eine überabzählbare Menge an.

3 Wie lautet das Konvergenzkriterium von Cauchy für eine Folge (a_n) ?

4 Nennen Sie das Quotientenkriterium für die Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen.

5 Geben Sie die Potenzreihendarstellung für $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ an.

6

- a) Nennen Sie die Umgebungsdefinition ($\varepsilon - \delta$ -Definition) für den Grenzwert einer Funktion f an der Stelle ξ .
- b) Wie lautet das Folgenkriterium für den Grenzwert von f an der Stelle ξ ?

7 Formulieren Sie den Satz von Taylor (mit dem Taylorpolynom n-ter Ordnung und dem Restglied von Lagrange).

8 Wie lautet die Definition für die Konvexität einer Funktion f auf einem Intervall I ?

9 Formulieren Sie den 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

10 Beweisen Sie die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11 Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der Folge

$$x_n = (-1)^n + 2^{1-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

12 Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} \cos kx \quad \text{für } |q| < 1$$

13 Skizzieren Sie die Menge aller Punkte (x, y) in der $x - y - Ebene$, die der Ungleichung

$$x^2 - 2|y| > 1$$

genügen.

14 Berechnen Sie den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

15 Bestimmen Sie mit der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

16 Es sei f eine auf dem Intervall $[-1, 1]$ definierte beschränkte Funktion.

Zeigen Sie mit der $\varepsilon - \delta$ -Definition die Stetigkeit der Funktion $g(x) = xf(x)$ im Punkt $x = 0$.

17 Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{x} \log x \, dx$$

18 Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$