Nachklausur zur Analysis I WS 95/96

Glaeske

Dauer: 150 Minuten
Hilfsmittel: keine

Mit 30 Punkten ist die Klausur bestanden.

1. (4) Beschreiben Sie Form und Lage der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-6| + |z| \leq 10\}$.
2. (4) Welche reellen Zahlen x erfüllen die Ungleichung
$$|3x+2| + x < 4 \text{ ?}$$
3. (4) Zeigen sie, dass für alle natürlichen Zahlen n
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
gilt.
4. (6) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $x_n = (-1)^n + sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{3}\right)$.
5. Berechnen Sie
   (a) (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
   (b) (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
6. (4) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $x_n = \frac{3n^2+n}{n^2+n+1}$ und beweisen Sie mittels der ϵ - n_ϵ - Definition, dass dieser Wert der Grenzwert ist.
7. (3) Geben Sie für eine reellwertige Funktion f eine präzise Beschreibung der Aussage „f ist nicht stetig in x_0“ an.
8. (5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Die Funktion g sei definiert durch $g(x) = |f(x)|$. Zeigen Sie, dass dann auch g stetig ist.
9. (5) In welchen Punkten x ist die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
stetig? (Begründung!)
10. Berechnen Sie
    (a) (3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

(b) (3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x-1}$

11. (5) Es sei $f(x) = |x-1| \cdot |x-2|^3$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle x_0 in denen $f'(x)$existiert.

12. (4) Es sei $f(x) = x^2 \cos x$. Berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle natürlichen Zahlen n.

13. (4) Es sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom n-ten Grades bei $x_0 = 1$.