Klausur Differential- und Integralrechnung 1

(16. Februar 2005, *Vorlesung* : Prof. Dr. H.-J. Schmeißer)

- *Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.*
- *Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.*
- *Jedes Lösungsblatt ist leserlich (!) mit Namen und Vornamen (bzw. Matrikelnummer) zu versehen.*

	Aufgaben	**Punkte**
1	Für welche reellen Zahlen x und y gilt $\quad |x-y|+2 \le |x| \quad$? Fertigen Sie ein Skizze der Lösungsmenge an.	**4**
2	Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < x_k < 1$ für $k = 1, \ldots, n$. Man zeige: $$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \ \ge \ 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$	**3**
3	**(a)** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2005}$.	**3**
	(b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $$z^4 = 8(\, i\sqrt{3} - 1\,) \ .$$	**3**
4	Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.	**7**
	(a) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$	(2)
	(b) $x_n = n(1 - \sqrt{1 - 2/n})$	(2)
	(c) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$.	(3)
5	Berechnen Sie die Summe der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k 2^k}{3^{k-2}} - \frac{3^k}{(k-1)!}\right]$. Ist die Reihe absolut konvergent?	**4**
6	Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, in **(b)** auch auf absolute Konvergenz.	**5**
	(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$	(2 + 3)

Bitte Wenden !

	Aufgaben	Punkte
7	Wann heißt eine Funktion f gleichmäßig stetig auf einer Menge $I \subset D(f)$? Zeigen Sie, dass die Funktion $\arctan$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.	**4**
8	**(a)** Untersuchen Sie, ob die Funktionen $(n \in \mathbb{N})$ $$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < -\frac{\pi}{n} \\ \sin\dfrac{nx}{2} & \text{für} \quad -\frac{\pi}{n} \le x \le \frac{\pi}{n} \\ 1 & \text{für} \quad x > \frac{\pi}{n} \end{cases}$$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind.	**3**
	(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Ist die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$.	**2**
9	Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen	**6**
	(a) $f(x) = \left(\arctan\sqrt{x^2+1}\right)^{-2}$, $\quad D(f) = \mathbb{R}$ **(b)** $f(x) = x^{x+\ln x}$, $\quad D(f) = (0,\infty)$.	(3) (3)
10	Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:	**4**
	(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^n - 1\right]$, $\quad n \in \mathbb{N}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right]$.	(2) (2)
11	Gegeben sei auf $\mathbb{R}$ die Funktion f durch $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}(2+x^2)$.	
	(a) Untersuchen Sie die Funktion auf Monotonie und lokale Extrema. **(b)** Wieviele Lösungen $x \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $e^{\frac{2x}{3}}(2+x^2) = 1$? (Begründung)	**4** **2**
12	Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktion	**6**
	(a) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ auf $(0,\infty)$, **(b)** $f(x) = x\arctan x$ auf $\mathbb{R}$	(3) (3)
	Für den Übungsschein benötigen Sie mindestens 25 Punkte.	**Σ : 60**