Nachklausur Analysis I SS 02

Hinrichs

Hilfsmittel: keine

Mit 15 Punkten ist die Klausur bestanden.

1. (4) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$1+\frac{n}{2}\leq\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\leq n+\frac{1}{2}\qquad n\in\mathbb{N}$$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen von
   (a) (2) $z^6=-27\qquad z\in\mathbb{C}$
   (b) (2) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-1}\leq 1\qquad x\in\mathbb{R}$
3. (2) Bestimmen Sie $\sup\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\}$ und $\inf\{\frac{1}{2}\pm\frac{n}{2n+1}\}$ für $n\in\mathbb{N}$.
4. Bestimmen Sie
   (a) (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$
   (b) (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}\qquad 0<a<b.$
5. (2) Wie lautet das Kriterium von Leibniz für die Konvergenz alternierender Reihen?
6. Untersuchen Sie für die gegebenen a_n, ob die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergieren
   (a) (2) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot 3^{-n}$
   (b) (2) $a_n=\pi^{-\sqrt{n}}$
7. (3) Füe welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$, wenn $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$.
8. (3) Zerlegen Sie $f(x)=\frac{1}{x^4+5x^2+4}$ in Partialbrüche.
9. Differentieren Sie in allen Punkten, in denen es möglich ist.
   (a) $f(x)=x^{x^x}+x^x+x\qquad x>0$
   (b) $f(x)=(1+x)\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(3+x^3\right)^{\frac{1}{3}}$
   (c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{für } |x|\leq 1\\ |x|-1 & \text{für } |x|>1\end{cases}$