Klausur zur Analysis I WS 95/96

Glaeske

Dauer: 120 Minuten
Hilfsmittel: keine

Mit 30 Punkten ist die Klausur bestanden.

1. (4) Beschreiben Sie Form und Lage der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 2\,|z + 1 + i|\}$.

2. (4) Welche reellen Zahle erfüllen die Ungleichung
$$\frac{6x+2}{3x-2} < 1 \text{ ?}$$

3. (5) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)}$, indem Sie durch Berechnung der ersten Summanden eine Formel vermuten und diese anschließend durch Induktion beweisen.

4. (3) Beweisen Sie, dass ein offenes Intervall eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

5. (6) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

6. Berechnen Sie
   (a) (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
   (b) (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

7. (4) Vermuten Sie einen Grenzwert der Folge $x_n = \frac{n\,sin\,n}{n^2+1}$ und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels der ϵ - n_ϵ - Definition.

8. (3) Geben Sie für eine Folge reeller Zahlen x_n eine präzise Beschreibung der Aussage „(x_n) ist keine Nullfolge“ an.

9. (5) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und besitze die endlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist.

10. (4) Gibt es eine Zahl A, so dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2 \\ A & \text{für } x = 2 \end{cases}$$
auf $\mathbb{R}$ stetig ist? (Begründung!)

11. Berechnen Sie

    (a) (2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{sin\,x}{x}$

    (b) (3) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

12. (3) Es sei $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000)$. Berechnen Sie $f'(0)$.

13. (5) Es sei $f(x) = x^2 e^{ax}$. Berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für alle natürlichen Zahlen n.

14. (4) Es sei $f(x) = x\,sin\,x$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom n-ten Grades bei $x_0 = 0$.