Klausur Differential- und Integralrechnung 1

(7. April 2005, *Vorlesung* : Prof. Dr. H.-J. Schmeißer)

- *Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.*
- *Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.*
- *Jedes Lösungsblatt ist leserlich (!) mit Namen und Vornamen (bzw. Matrikelnummer) zu versehen.*

	Aufgaben	**Punkte**
1	Für welche reellen Zahlen x und y gilt $\|x-1\|\, y - 1 \geq 0$? Fertigen Sie eine Skizze der Lösungsmenge an.	**2**
2	Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $n! \geq 3^n$?	**3**
3	**(a)** Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Zahl $z = \left(i - \sqrt{3}\right)^8$.	**3**
	(b) Berechnen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 + 1 = 0$.	**3**
4	Untersuchen Sie die Zahlenfolgen $\{x_n\}_n$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.	**6**
	(a) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{-n+5}$, $n \geq 2$,	(2)
	(b) $x_n = \sqrt[n]{n^4 - n^2 + 2}$, $n \geq 1$,	(2)
	(c) $x_n = \left[\frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}\right]$, $n \geq 1$.	(2)
5	Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\pi}{k!} + \frac{(-1)^k}{2^k}\right)$. Ist die Reihe absolut konvergent?	**3**
6	Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:	**4**
	(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}-2)^2}{k^2 + \sqrt{k^4+1}}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty} k^7\, e^{-k^2}$	(2 + 2)

Bitte Wenden !

	Aufgaben	Punkte
7	Wann heißt eine Funktion f gleichmäßig stetig auf einer Menge $I \subset D(f)$? Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion $\ln$ auf $(1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.	4
8	Gegeben seien auf $[0,1]$ die Funktionen f_n durch $f_n(x) \;=\; n\,x(1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.	
	(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [0,1]$.	2
	(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Ist die Folge $(f_n(x))_n$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent?	4
9	Berechnen Sie	
	(a) die erste Ableitung von $f(x) = 2x \; \arctan \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad D(f) \;=\; \mathbb{R}$	3
	(b) die erste Ableitung von $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, $\quad D(f) \;=\; (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.	4
	(c) die zweite Ableitung von $f(x) = \mid x^3 \mid$, $\quad D(f) \;=\; \mathbb{R}$.	2
10	Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:	5
	(a) $\lim\limits_{x\to 0} \; (1+2x)^{\frac{1}{x}}$,	(2)
	(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.	(3)
11	Untersuchen Sie die Funktion f, gegeben durch $f(x) \;=\; x^4 \, e^{-x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, auf Monotonie, lokale und globale Extrema.	5
12	Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion	7
	(a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ auf $(0, \infty)$,	(4)
	(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ auf $\mathbb{R}$	(3)
	Für den Übungsschein benötigen Sie mindestens 25 Punkte.	**Σ : 60**