Klausur zur Analysis I

Weber

SS 99

Dauer: 150 Minuten
Die Klausur beinhaltet 31 Punkte. Mit 15 Punkten ist sie bestanden.

1. (3) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die folgende Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. (3) Berechnen Sie $z = \left(1+\sqrt{3}i\right)^{15} + \frac{1-3i}{1-i}$.

3. (3) Stellen Sie die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

4. (4) Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \longrightarrow \infty$:

   (a) $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$

   (b) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

5. (2) Berechnen Sie den Limes superior und den Limes inferior der Folge $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ mit

$$a_n = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right)$$

6. (5) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

7. (3) Bestimmen Sie alle Stetigkeitsstellen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

8. (2) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$8x^3 + 12x^2 - 2x - 3 = 0$$

im Intervall $(-1, 1)$ mindestens zwei Lösungen hat.

9. (3) Untersuchen Sie, ob die durch

$$f_n(x) = \frac{x^n - n}{x^n + n}, \qquad 0 \le x \le 2$$

definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

10. (3) Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 stetig und $f(x_0) < 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.