Klausur Differential- und Integralrechnung I SS 02

Hinrichs

Hilfsmittel: keine

Mit 15 Punkten ist die Klausur bestanden.

1. (3) Beweisen Sie durch vollständige Induktion
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$
2. (2) Geben Sie Realteil und Imaginärteil aller Lösungen von $z^3-i=0$ an.
3. Bestimmen Sie
   (a) (1) $\underset{n\to\infty}{lim} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
   (b) (2) $\underset{n\to\infty}{lim} = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$
4. Untersuchen Sie, ob für die angegebenen a_n die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.
   (a) (1) $a_n=\cos n\pi\cdot\tan\frac{\pi}{n}$
   (b) (2) $a_n=\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$
5. (4) Geben Sie für alle $z\in\mathbb{C}$ das Konvergenzverhalten der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)z^n \qquad \text{an.}$$
6. (3) Bestimmen Sie für $|q|<1$ die Summen der folgenden Reihen
   (a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots$
   (b) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots$
7. (2) Für welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^n}$
8. (2) Wann heißt eine reellwertige Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen gleichmäßig stetig in $D_f=[a,b]$
9. (2) Begründen Sie auf <u>zwei verschiedene</u> Weisen, dass $f(x)=x^2$ im Intervall $(1,2)$ gleichmäßig stetig ist.
10. Differenzieren Sie $f(x)$ in allen Punkten, wo dies möglich ist.
    (a) (2) $f(x)=\left|x^3\right| \qquad x\in\mathbb{R}$
    (b) (2) $f(x)=(\sin x)^{\sin x} \qquad x\in(0,\pi)$
    (c) (2) $f(x)=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x$