DAS PASCALSCHE DREIECK UND DER BINOMISCHE LEHRSATZ

STILIANOS LOUCA

1. Einführung

Als Pascalsches Dreieck wird die folgende Anordnung von natürlichen Zahlen bezeichnet:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
. & . & .
\end{array}$$

wobei das Element $E_{i,j},\ i,j \in \mathbb{N}_0$, die j-te Zahl in der i-ten Zeile ist.

Es gilt:

$$E_{i,j} = \begin{cases} E_{i-1,j-1} + E_{i-1,j} & : \ 1 \leq j \leq i \\ \\ 0 \ : \ sonst \end{cases}$$

Date: 29. Januar 2007.

2. Binomial-Koeffizienten

Es gilt folgendes auf den ersten Blick verblüfendes Verhältniss:

$$\binom{n}{k} = E_{n,k} \ \forall n, k \in \mathbb{N}_0$$

Proof.

$$Induktionsanfang:$$

$$\binom{0}{0} = 1 = E_{0,0}$$

$$Induktionsannahme:$$

$$\binom{n}{k} = E_{n,k}$$

$$Induktionsschritt: n \to n+1,\ \ k \to k+1$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot [(n-k+1)+k]}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

$$= \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!}$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = E_{n,k} + E_{n,k-1} = E_{n+1,k}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n! \cdot [(n-k-1)+(k+1)]}{n \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!}$$

$$= \frac{n! \cdot (n-k-1)}{n \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)!} + \frac{n!}{n \cdot k! \cdot (n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k+1)! \cdot (n-k-2)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!}$$

$$= \binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k} = E_{n-1,k+1} + E_{n-1,k} = E_{n,k+1}$$

$\square$

3. Binomischer Lehrsatz

Es gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ \forall a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

Proof.

$$Induktionsanfang:$$

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{-k} b^k$$

$$Induktionsannahme:$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^k$$

$$Induktionsschritt:$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= \left(E_{n,0} \cdot a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k \right) + \left(E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} E_{n,k} \cdot a^{n-k} b^{k+1} \right)$$

$$= E_{n,0} \cdot a^{n+1} + E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} E_{n,k} \cdot a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} E_{n,k-1} \cdot a^{n+1-k} b^k$$

$$= E_{n,0} \cdot a^{n+1} + E_{n,n} \cdot b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [E_{n,k} + E_{n,k-1}] \cdot a^{n+1-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} [E_{n,k} + E_{n,k-1}] \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} E_{n+1,k} \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot a^{n+1-k} b^k$$

□