B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 25.06.07
Abgabe: 02.07.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 47 (2+2)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, und sei D_{2n} die Untergruppe von $\mathrm{Sym}(n)$, die von den Permutationen $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ und $\tau = (1, n)(2, n-1)\ldots$ erzeugt wird. Zeigen Sie:

(i) $|D_{2n}| = 2n$

(ii) D_{2n} enthält genau $\frac{n+3}{2}$ (bzw. $\frac{n}{2}+3$) Konjugationsklassen, wenn n ungerade (bzw. gerade) ist.

Aufgabe 48 (2+2+2+2)

Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 47.

(i) Bestimmen Sie die komplexen Matrixdarstellungen von D_{2n} vom Grad 1. (Es ist nützlich, zwischen den Fällen $n \equiv 0 \pmod 2$ und $n \equiv 1 \pmod 2$ zu unterscheiden.)

(ii) Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \zeta^r & 0 \\ 0 & \zeta^{-r} \end{pmatrix} \quad , \quad \tau \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine komplexe Darstellung Δ_r von D_{2n} definiert wird.

(iii) Zeigen Sie, dass Δ_r für $r = 0, \ldots, n-1$ irreduzibel ist.

(iv) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen irreduzibler komplexer Darstellungen von D_{2n} an.

Aufgabe 49 (2)

Gegeben seien eine endliche abelsche Gruppe G, eine Untergruppe H von G und ein Homomorphismus $\mu : H \to \mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus $\lambda : G \to \mathbb{C}^\times$ mit $\lambda(h) = \mu(h)$ für alle $h \in H$ existiert.