B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 11.06.07
Abgabe: 18.06.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 39 (2)
Seien K ein Körper , $n \in \mathbb{N}$ und A der Ring aller oberen Dreiecksmatrizen in $K^{n\times n}$. Bestimmen Sie $Z(A)$.

Aufgabe 40 (2+2)
Berechnen Sie den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Aufgabe 41 (2+2)
Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Wie in Aufgabe 25 fassen wir V als $K[X]$-Modul auf.

(i) Zeigen Sie, dass V ein $K[X]$-Torsionsmodul ist.

(ii) Es sei $V \simeq K[X]/(\varphi)$ mit $\varphi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in K[X]$. Zeigen Sie, dass V eine K-Basis hat, bzgl. der die Matrix von f die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & \mathbf{0} & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 42 (2+3)
Es sei F eine freie abelsche Gruppe mit Basis $b_1, \ldots, b_n$, und es sei E eine Untergruppe von F mit Erzeugenden

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

dabei sei $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle i, j. Wir setzten $A := (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Zeigen Sie:

(i) Ist $m < n$, so ist $|F : E| = \infty$.

(ii) Im Fall $m = n$ gilt $|F : E| < \infty$ genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Ggf. ist $|F : E| = |\det A|$.