B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 04.06.07
Abgabe: 11.06.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 34 (2+2)
Beweisen Sie: $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.

Aufgabe 35 (2+2)

(i) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht frei ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ nicht frei ist.

Aufgabe 36 (2)
Es sei K ein Körper und R der Ring der oberen Dreiecksmatrizen in $K^{3\times 3}$. Entscheiden Sie, ob R ein halbeinfacher Ring ist.

Aufgabe 37 (2)
Seien K ein Körper , $K[X]$ der Polynomring über K und $R := \mathrm{End}_K(K[X])$ der Ring aller K-Endomorphismen des K-Vektorraums $K[X]$. Wir definieren $f_1, f_2 \in R$ durch

$$f_1(X^i) := \begin{cases} X^{i/2}\ , & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ 0\ , & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_2(X^i) := \begin{cases} 0\ , & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ X^{(i-1)/2}\ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_1, f_2 eine Basis des regulären R-Linksmoduls R bilden. (Da andererseits 1_R eine Basis des regulären R-Moduls ist, zeigt dies, dass ein freier R-Modul durchaus Basen mit unterschiedlicher Elementeanzahl haben kann.)

Aufgabe 38 (2)
Sei N der von $(4, 5, 6)$ und $(7, 8, 9)$ erzeugte Untermodul von $\mathbb{Z}^3$, und sei $M := \mathbb{Z}^3/N$. Bestimmen Sie den Rang von $M/T(M)$ und die Ordnung von $T(M)$.