B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 24.05.07
Abgabe: 04.06.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 29 (2)

Zeigen Sie, dass der folgende Ring R rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch ist:

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z},\ b, c \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Aufgabe 30 (2+2)

Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring. Beweisen Sie:

(i) Es gibt endlich viele Primideale $P_1, \ldots, P_n$ von R mit $P_1 \ldots P_n = 0$.

(ii) R enthält nur endlich viele minimale Primideale.

Aufgabe 31 (2+2)

Es sei K ein Körper und R der Ring aller oberen Dreiecksmatrizen in $K^{3\times 3}$.

(i) Geben Sie ein Kompositionsreihe des regulären R-Linksmoduls R an.

(ii) Wie viele einfache R-Linksmoduln gibt es (bis auf Isomorphie)?

Aufgabe 32 (2+2)

Es seien R ein Ring und M ein R-Linksmodul mit einer Kompositionsreihe der Länge $l(M)$. (Nach dem Satz von Jordan-Hölder ist das wohldefiniert.) Zeigen Sie:

(i) Für jeden Untermodul N von M haben N und M/N eine Kompositionsreihe, und es gilt: $l(M) = l(N) + l(M/N)$.

(ii) Für Untermoduln L, N von M gilt stets: $l(L + N) + l(L \cap N) = l(L) + l(N)$.

Aufgabe 33 (2)

Es seien R ein Ring und M ein R-Linksmodul. Dann nennt man die Summe $\mathrm{Soc}(M)$ aller einfachen Untermoduln von M den **Sockel** von M. Zeigen Sie, dass für R-Linksmoduln M, N und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ stets gilt: $f(\mathrm{Soc}(M)) \subseteq \mathrm{Soc}(N)$.