B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 21.05.07
Abgabe: 28.05.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 25 (2)

Seien K ein Körper, V ein K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass V durch die folgende Vorschrift zu einem $K[X]$–Modul wird:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\ X^i\right) v := \sum_{i=0}^{\infty} a_i f^i(v) \qquad \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\ X^i \in K[X],\ v \in V\right)$$

Aufgabe 26 (2+2+2)

Seien R ein Ring und M ein R-Modul.

(i) Zeigen Sie, dass

$$I := \mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R : rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

ein Ideal in R ist; dieses heißt **Annullator** von M in R.

(ii) Zeigen Sie, dass M folgendermaßen zu einem R/I–Modul wird:

$$(r + I)m := rm \qquad (r \in R, m \in M).$$

(iii) Beschreiben Sie $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V)$ in der Situation von Aufgabe 25 mit Begriffen aus der Linearen Algebra.

Aufgabe 27 (2+2)

Seien K ein Körper und $R := K^{n\times n}$ der Ring aller $n \times n$–Matrizen mit Koeffizienten in K für ein $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie, dass der K–Vektorraum $M := K^{n\times 1}$ aller Spaltenvektoren ein einfacher R–Modul bzgl. der Matrixmultiplikation ist.

(ii) Zeigen Sie auch, dass der reguläre R–Linksmodul R zu M^n isomorph ist.

Aufgabe 28 (2+2+2)

Sei R ein Ring. Beweisen Sie:

(i) Für jeden R–Modul M und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{End}_R(M^n) \cong \mathrm{End}_R(M)^{n\times n}$.

(ii) Sind $M_1, \ldots, M_n$ R–Moduln mit $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) = 0$ für alle $i \neq j$, so ist

$$\mathrm{End}_R(M_1 \times \ldots \times M_n) \cong \mathrm{End}_R(M_1) \times \ldots \times \mathrm{End}_R(M_n).$$

(iii) Für jedes $e \in R$ mit $e^2 = e$ ist $\mathrm{End}_R(Re) \cong (eRe)^\circ$; insbesondere ist $\mathrm{End}_R(R) \cong R^\circ$.