B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 30.04.07
Abgabe: 07.05.07

# Übungen zur Algebra II

Blatt 3

**Aufgabe 9** (2+2)
Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper $K$ gilt:

(i) $K^{n\times n}$ ist ein einfacher Ring.

(ii) $Z(K^{n\times n}) = K \cdot 1_n$.

**Aufgabe 10** (2+2+2)
Für jedes Ideal $I$ in einem kommutativen Ring $R$ sei

$$\mathcal{V}(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq P\}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{V}(\{0\}) = \mathrm{Spec}(R)$, $\mathcal{V}(R) = \emptyset$.

(ii) Für jede Familie $(I_j)_{j\in J}$ von Idealen von $R$ ist $\mathcal{V}(\sum_{j\in J} I_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{V}(I_j)$.

(iii) Für Ideale $I_1, I_2$ von $R$ ist $\mathcal{V}(I_1 I_2) = \mathcal{V}(I_1 \cap I_2) = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$.

Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ heißt **abgeschlossen**, falls ein Ideal $I$ von $R$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{V}(I)$ existiert; eine Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathrm{Spec}(R)$ heißt **offen**, falls $\mathrm{Spec}(R) \smallsetminus \mathcal{U}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(R)$ ist. Das System der offenen Teilmengen heißt **Zariski-Topologie** auf $\mathrm{Spec}(R)$.

**Aufgabe 11** (3)
Sei $R$ ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass zu jeder Familie $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$ mit $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$ eine endliche Teilmenge $J_0$ von $J$ mit $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{j\in J_0} \mathcal{U}_j$ existiert. (Dies bedeutet, dass $\mathrm{Spec}(R)$ als topologischer Raum quasikompakt ist.)

**Aufgabe 12** (2+2)
Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen $R, S$.

(i) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Q) \in \mathrm{Spec}(R)$ für alle $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die durch (i) definierte Abbildung $F : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ stetig ist (d.h. dass $F^{-1}(\mathcal{U})$ für jede offene Teilmenge $\mathcal{U}$ von $\mathrm{Spec}(R)$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(S)$ ist).

**Aufgabe 13** (3)
Sei $I$ ein Ideal in einem kommutativen Ring $R$, und seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $I \subseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$. Zeigen Sie, dass $I \subseteq P_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.