B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 23.04.07
Abgabe: 30.04.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 5 $(2 + \ldots + 2)$

Gegeben sei ein **Integritätsbereich** R, d.h. ein kommutativer Ring $R \neq \{0\}$ mit $ab \neq 0$ für alle $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass durch $(r, s) \sim (r', s') :\Leftrightarrow rs' = r's$ eine Äquivalenzrelation auf $R \times (R \smallsetminus \{0\})$ definiert wird; die entsprechenden Äquivalenzklassen werden mit $[r, s]$ bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie, dass man durch

$$[r, s] + [t, u] := [ru + st, su] \text{ und } [r, s] \cdot [t, u] := [rt, su]$$

wohldefinierte Verknüpfungen auf $Q(R) := \{[r, s] : r, s \in R, s \neq 0\}$ erhält.

(iii) Zeigen Sie, dass $Q(R)$ so zu einem Körper wird; man nennt $Q(R)$ den **Quotientenkörper** von R.

(iv) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : R \to Q(R), r \mapsto [r, 1]$, ein Monomorphismus ist.

(v) Zeigen Sie, dass zu jedem Körper K und jedem Homomorphismus $g : R \to K$ genau ein Homomorphismus $h : Q(R) \to K$ mit $g = h \circ f$ existiert.

(vi) Beweisen Sie, dass jedes Element in $Q(R)$ die Form $\frac{f(r)}{f(s)}$ mit $r, s \in R, s \neq 0$ hat.

Aufgabe 6 (2+2)

Zeigen Sie, dass für jedes Ideal I eines kommutativen Ringes R gilt:

(i) Genau dann ist I ein maximales Ideal in R, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

(ii) Genau dann ist I ein Primideal in R, wenn R/I ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 7 (3)

Ein Primideal P in einem Ring R heißt **minimal**, falls kein Primideal Q in R mit $Q \subset P$ existiert. Zeigen Sie unter Verwendung von Zorns Lemma, dass zu jedem Primideal I in einem kommutativen Ring R ein minimales Primideal P in R mit $P \subseteq I$ existiert.

Aufgabe 8 (3)

Gegeben sei eine nichtleere **multiplikative Teilmenge** X eines kommutativen Ringes R (d.h. $xy \in X$ für alle $x, y \in X$). Zeigen Sie unter Verwendung von Zorns Lemma, dass zu jedem Ideal I in R mit $I \cap X = \emptyset$ ein Primideal P in R mit $I \subseteq P$ und $P \cap X = \emptyset$ existiert.