B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 16.04.07
Abgabe: 23.04.07

Übungen zur Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1 (2+2+2)
Zeigen Sie, dass für jeden Ring R gilt:
(i) Für jede Familie $(I_j)_{j\in J}$ von Idealen I_j in R ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{j\in J} I_j$ ein Ideal in R.
(ii) Für Ideale $I_1, \ldots, I_n$ in R ist auch die Summe

$$I_1 + \cdots + I_n := \{x_1 + \cdots + x_n : x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\}$$

ein Ideal in R.
(iii) Für Ideale I, J in R ist auch das Produkt

$$IJ := \{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k : x_1, \ldots, x_n \in I,\ y_1, \ldots, y_n \in J,\ n \in \mathbb{N}_0\}$$

ein Ideal in R mit $IJ \subseteq I \cap J$.

Aufgabe 2 (3)
Gegeben sei ein Ideal I in einem Ring R. Zeigen Sie, dass die Menge

$$R/I := \{r + I : r \in R\}$$

aller Nebenklassen von R nach I zu einem Ring wird, wenn man für $a, b \in R$ definiert:

$$(a + I) + (b + I) := (a + b) + I \quad \text{und} \quad (a + I) \cdot (b + I) := ab + I.$$

Man nennt R/I den *Restklassenring* von R modulo I.

Aufgabe 3 (2+2+2)
(i) Zeigen Sie, dass ein kommutativer Ring R genau dann einfach ist, wenn er ein Körper ist.
(ii) Zeigen Sie, dass der volle Matrixring $K^{n\times n}$ für jeden Körper K und alle $n \in \mathbb{N}$ ein einfacher Ring ist.
(iii) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist das Ideal $n\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}$?

Aufgabe 4 (2+2+2)
Ein echtes Ideal P in einem Ring R heißt *Primideal*, falls für alle Ideale I, J von R gilt: $IJ \subseteq P \Longrightarrow I \subseteq P \vee J \subseteq P$.
(i) Zeigen Sie, dass jedes maximale Ideal in R ein Primideal ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in (i) die Umkehrung nicht gilt.
(iii) Beweisen Sie, dass ein echtes Ideal P eines kommutativen Rings R genau dann ein Primideal ist, wenn für alle $a, b \in R$ gilt: $ab \in P \Longrightarrow a \in P \vee b \in P$.