

## Übungen zur Algebra I

### Blatt 13

#### Aufgabe 54 (2)

Zeigen Sie, dass die Normalteilerrelation  $\trianglelefteq$  nicht unbedingt transitiv ist.  
(*Hinweis*: Betrachten Sie z.B. die Gruppe  $G = \text{Alt}(4)$ .)

#### Aufgabe 55 (2+...+2)

Es sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  Zerfällungskörper des Polynoms  $\varphi = X^4 - X^2 - 1$  über  $\mathbb{Q}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  irreduzibel über  $\mathbb{Q}$  ist.
- (ii) Bestimmen Sie  $[K : \mathbb{Q}]$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass  $K|\mathbb{Q}$  eine Galoiserweiterung ist.
- (iv) Berechnen Sie  $G := \text{Gal}(K|\mathbb{Q})$ .
- (v) Bestimmen Sie alle Untergruppen von  $G$ .
- (vi) Berechnen Sie alle Teilkörper von  $K$ .

#### Aufgabe 56 (2)

Es sei  $K$  ein Körper und  $L$  Zerfällungskörper eines Polynoms  $\varphi \in K[X]$  vom Grad  $n$  über  $K$ .  
Zeigen Sie:  $[L : K] \leq n!$ .

#### Aufgabe 57 (2)

Sei  $L|K$  eine separable Körpererweiterung des Grades 2. Zeigen Sie, dass  $L|K$  eine Galoiserweiterung ist.

#### Aufgabe 58 (2+2)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig sind, und begründen Sie Ihre Antwort:

- (i) Das reguläre 100-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
- (ii) Jede separable Körpererweiterung vom Grad 4 ist eine Galoiserweiterung.