

Übungen zur Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 50 (2+...+2)

Es sei $K := \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

- (i) Bestimmen Sie $[K : \mathbb{Q}]$.
- (ii) Zeigen Sie, dass $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist.
- (iii) Berechnen Sie $G := \text{Gal}(K|\mathbb{Q})$.
- (iv) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G .
- (v) Berechnen Sie die entsprechenden Teilkörper von K .

Aufgabe 51 (2+...+2)

Gegeben seien eine Gruppe G und eine Untergruppe H von G .

- (i) Zeigen Sie, dass für $g \in G$ die Abbildung

$$\varrho_g : G/H \rightarrow G/H, \quad xH \mapsto gxH,$$

bijektiv ist.

- (ii) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\varrho : G \rightarrow \text{Sym}(G/H), \quad g \mapsto \varrho_g,$$

ein Homomorphismus ist.

- (iii) Zeigen Sie: $\text{Ker}(\varrho) = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$.
- (iv) Beweisen Sie: $|G : H| < \infty \Rightarrow |G : \text{Ker}(\varrho)| < \infty$.

Aufgabe 52 (2)

Gegeben sei eine Untergruppe H einer endlichen Gruppe G , deren Index $|G : H|$ der kleinste Primteiler p von $|G|$ ist. Beweisen Sie: $H \trianglelefteq G$.

Aufgabe 53 (2)

Gegeben seien eine endliche Gruppe G und ein Homomorphismus $\lambda : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{g \in G} \lambda(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } \lambda(g) = 1 \text{ für alle } g \in G \text{ ist.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$