

## Übungen zur Algebra I

### Blatt 11

#### Aufgabe 45 (2+...+2)

Sei  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $\zeta^8 = 1 \neq \zeta^4$ .

- (i) Zeigen Sie:  $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 4$ .
- (ii) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$  eine Galoiserweiterung ist.
- (iii) Bestimmen Sie  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$ .
- (iv) Berechnen Sie alle Teilkörper von  $\mathbb{Q}(\zeta)$ .
- (v) Ist  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q})$  zu  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})|\mathbb{Q})$  isomorph?
- (vi) Ist  $\mathbb{Q}(\zeta)$  zu  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$  isomorph?

#### Aufgabe 46 (2+2+2)

- (i) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 6 ein Element der Ordnung 3 enthält.
- (ii) Beweisen Sie, dass es genau zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 6 gibt.
- (iii) Wieviele Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 7 gibt es?

#### Aufgabe 47 (2)

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}$  überabzählbar viele algebraisch abgeschlossene Teilkörper enthält.

#### Aufgabe 48 (2)

Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^2 = 2i$ . Berechnen Sie  $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ .

#### Aufgabe 49 (2)

Geben Sie eine Körpererweiterung  $L|K$  vom Grad  $[L : K] = 4$  an, die keine Galoiserweiterung ist, und begründen Sie Ihre Wahl.