B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 11.12.06
Abgabe: 18.12.06

Übungen zur Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 35 (2)

Zeigen Sie, dass jede Gruppe gerader Ordnung ein Element der Ordnung 2 enthält.

Aufgabe 36 (2)

Zeigen Sie, dass für jede echte Untergruppe H einer Gruppe G gilt: $G \neq \bigcup\limits_{g \in G} gHg^{-1}$.

Aufgabe 37 (2+2)

Zeigen Sie, dass für Untergruppen A, B, C einer Gruppe G stets gilt:

(i) AB ist die disjunkte Vereinigung von genau $|A : A \cap B|$ Linksnebenklassen nach B (auch wenn AB keine Untergruppe von G ist). Insbesondere gilt also:

$$|AB| = |A : A \cap B| \cdot |B|.$$

Ist G endlich, so schreibt man diese Gleichung oft in der Form $|AB| \cdot |A \cap B| = |A| \cdot |B|$.

(ii) Im Fall $A \subseteq C$ ist $AB \cap C = A(B \cap C)$.

Aufgabe 38 (2+2+2)

Zeigen Sie, dass für Untergruppen A, B von endlichem Index in einer Gruppe G stets gilt:

(i) $|G : A \cap B| \leq |G : A| \cdot |G : B|$.

(ii) $\mathrm{ggT}(|G : A|, |G : B|) = 1 \Rightarrow |G : A \cap B| = |G : A| \cdot |G : B|$.

(iii) Ist G endlich, so gilt in (ii) außerdem $G = AB$.

Aufgabe 39 (2+2+2)

(i) Zeigen Sie, dass jede Gruppe G mit $a^2 = 1$ für alle $a \in G$ abelsch ist.

(ii) Beweisen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 4 gibt, und stellen Sie die entsprechenden Multiplikationstabellen auf.

(iii) Wie viele Gruppen der Ordnung 1,2,3,5 gibt es bis auf Isomorphie?