B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 04.12.06
Abgabe: 11.12.06

Übungen zur Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 31 $(2 + \ldots + 2)$

gegeben sei eine Teilmenge X einer Gruppe G. Zeigen Sie:

(i) Der **Normalisator** $N_G(X) := \{g \in G : gXg^{-1} = X\}$ von X in G ist eine Untergruppe von G.

(ii) Der **Zentralisator** $C_G(X) := \{g \in G : gxg^{-1} = x \text{ für } x \in X\}$ von X in G ist eine Untergruppe von G.

(iii) Für $a \in G$ ist $N_G(aXa^{-1}) = aN_G(X)a^{-1}$ und $C_G(aXa^{-1}) = aC_G(X)a^{-1}$.

(iv) $C_G(X) \trianglelefteq N_G(X)$.

(v) $X \leq G \Rightarrow X \trianglelefteq N_G(X)$.

(vi) Ist $X \leq G$, so ist $N_G(X)/C_G(X)$ zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(X)$ isomorph.

(vii) Das **Zentrum** $Z(G) := \{z \in G : zg = gz \text{ für } g \in G\}$ von G ist eine Untergruppe von G.

(viii) Jede Untergruppe von $Z(G)$ ist normal in G.

(ix) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 32 $(2 + \ldots + 2)$

Für Untergruppen A, B einer Gruppe G setzen wir $AB := \{ab : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

(i) $A \cup B \leq G \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$.

(ii) $AB \leq G \Leftrightarrow AB = BA$.

(iii) $A \leq G, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \leq G$

(iv) $A, B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \trianglelefteq G$

(v) Geben Sie ein Beispiel für Untergruppen A, B einer Gruppe G mit $AB \not\leq G$ an.

Aufgabe 33 (2+2)

(i) Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe einer unendlichen zyklischen Gruppe zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe der Ordnung $n < \infty$ zur primen Restklassengruppe modulo n isomorph ist.

Aufgabe 34 (2)

Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Abbildung ein Homomorphismus von Gruppen ist:

$$\varepsilon : \mathrm{Sym}(n) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot), \; g \longmapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{g(j) - g(i)}{j - i} \; .$$

Klausurtermin:
Mo., 12. Februar 2007; 09:00-12:00 Uhr; Hörsaal 1 Abbeanum