B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 27.11.06
Abgabe: 04.12.06

Übungen zur Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 26 (2+2)

(i) Sei L/K eine Körpererweiterung, und seien $a, b \in L$. Zeigen Sie, dass a und b genau dann algebraisch über K sind, wenn $a + b$ und ab algebraisch über K sind.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $a + bi$ genau dann algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, wenn a und b algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 27 (2+2+2)

(i) Zeigen Sie, dass das Polynom $f := X^3 - X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(ii) Sei z eine Nullstelle von f in $\mathbb{R}$ und $a := 2 - 3z + 2z^2$. Schreiben Sie a^{-1} als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, z, z^2$.

(iii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von z^2 über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 28 (2)
Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 9 in $\mathbb{F}_3[X]$.

Aufgabe 29 (2+2)

(i) Sei p eine Primzahl der Form $2^n - 1 (n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

(ii) Sei p eine Primzahl der Form $2^n + 1 (n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass n eine Potenz von 2 ist.

Aufgabe 30 (2)
In einem Körper K gebe es ein Element a mit $K \setminus \{0\} = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass K endlich ist.