

Übungen zur Algebra I

Blatt 6

Aufgabe 22 (2+2+2)

- (i) Zeigen Sie, dass $\varphi := X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - 1$ in $\mathbb{F}_3[X]$ ein Teiler von $X^{11} - 1$ ist.
- (ii) Beweisen Sie, dass φ irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$ ist. *Hinweis:* Betrachten Sie den Restklassenring $\mathbb{F}_3[X]/(\varphi)$ für einen irreduziblen Teiler ψ von φ .
- (iii) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - X - a$ für jede Primzahl p und jedes $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.

Aufgabe 23 (2+2+2+2)

Es sei α ein Automorphismus des Körpers \mathbb{R} . Zeigen Sie:

- (i) $\alpha(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.
- (ii) Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, so ist $\alpha(x) > 0$.
- (iii) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so ist $\alpha(x) < \alpha(y)$.
- (iv) $\alpha(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 24 (2+2)

- (i) Zeigen Sie, dass sich jedes Element c in einem endlichen Körper K in der Form $c = a^2 + b^2$ schreiben lässt. *Hinweis:* Man kann das Schubfachprinzip verwenden.
- (ii) Für welche endlichen Körper K ist die Gleichung $x^2 = -1$ in K lösbar?

Aufgabe 25 (2)

Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^{16} - X$ in $\mathbb{F}_2[X]$.