

Übungen zur Algebra I

Blatt 5

Aufgabe 18 (2)

Sei $\varphi := X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $a := X + (\varphi) \in \mathbb{Q}[X]/(\varphi)$. Berechnen Sie $(1 + a^2)^{-1}$.

Aufgabe 19 (2+2+2+2)

Sei $2 \neq p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ und $G := U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Zeigen Sie:

- (i) G enthält ein Element a der Ordnung p^{n-1} . (*Hinweis: Aufgabe 11*).
- (ii) G enthält ein Element b der Ordnung $p - 1$. (*Hinweis: Satz 6.9*).
- (iii) G enthält ein Element c der Ordnung $p^{n-1}(p - 1)$. (*Hinweis: Aufgabe 10*).
- (iv) Finden Sie ein Element der Ordnung 20 in $U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$ und ein Element der Ordnung 18 in $U(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})$.

Aufgabe 20 (2+2)

- (i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt:

$$U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}) = \{\pm 5^k + 2^n\mathbb{Z} : k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1\}.$$

(*Hinweis: Aufgabe 11*).

- (ii) Folgern Sie, dass $U(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ kein Element der Ordnung 2^{n-1} enthält.

Aufgabe 21 (2+2)

- (i) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der Polynomring $K[X]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält.
- (ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ über \mathbb{Q} .