

Übungen zur Algebra I Blatt 2

Aufgabe 5 (2)

Zeigen Sie, dass für $a, m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{ggT}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{ggT}(m, n)} - 1$.

Aufgabe 6 (2)

Eine Rechenaufgabe des Inders Bramagupta (598-665):

Finde eine Zahl, die beim Teilen durch 6,5,4,3 die Reste 5,4,3,2 hat.

Aufgabe 7 (2)

Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p > 3$ und $q > 3$ gilt: $24 | p^2 - q^2$.

Aufgabe 8 (2)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$. (Z.B. ist $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 = 8$.) Eine natürliche Zahl n mit

$\sigma(n) = 2n$ heißt **vollkommen**. Beweisen Sie die folgende Beobachtung von Euklid:

Ist $2^a - 1$ Primzahl, so ist $n := 2^{a-1}(2^a - 1)$ vollkommen.

[Primzahlen der Form $2^a - 1$ heißen Mersenne-Primzahlen (Mersenne 1588-1648). Euler zeigte, dass jede gerade vollkommene Zahl die Form $2^{a-1}(2^a - 1)$ mit einer Mersenne-Primzahl $2^a - 1$ hat. Es ist unbekannt, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt.]

Aufgabe 9 (2+2)

(i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\varphi(n) \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$.

(ii) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = 14$.