B. Külshammer
M. Müller

Ausgabe: 17.10.06
Abgabe: 23.10.06

Übungen zur Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1 (2+2)

Die **Fermat-Zahlen** (Fermat 1601-1665) sind definiert durch $F_n = 2^{2^n} + 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\prod\limits_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$.

(ii) Je zwei verschiedene Fermat-Zahlen sind teilerfremd.

[Fermat vermutete, dass F_n stets eine Primzahl ist; dies ist richtig für $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Euler (1707-1783) zeigte aber: $641 | F_5$. Bis heute kennt man nur die obigen 5 Fermat-Primzahlen, und man vermutet, dass dies die einzigen sind. Es ist allerdings unbewiesen, ob es überhaupt unendlich viele zusammengesetzte Fermat-Zahlen gibt.]

Aufgabe 2 (2+2)

(i) Heute ist Dienstag. Welchen Wochentag haben wir in 10 000 Tagen?

(ii) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $n + 1 | n^2 + 1$?

Aufgabe 3 (2+2+2+2)

Die **Fibonacci-Zahlen** (Leonardo von Pisa 1170-1250) sind definiert durch

$$f_1 := 1, \ f_2 := 1, \ f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \ \ (n \geq 2).$$

(i) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2}$.

(iii) Überlegen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Zahl f_n durch 3 teilbar ist, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

(iv) Analog zu (iii) für die Teilbarkeit durch 4.

Aufgabe 4 (2+2)

(i) Seien $a, b, r \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass der erweiterte euklidische Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ genau r Schritte benötigt (d.h. $z_{r+1} = 0 \neq z_r$ mit den Bezeichnungen der Vorlesung). Wie groß muss a mindestens sein?

(ii) Berechnen Sie den ggT von $a = 632$ und $b = 547$, und stellen Sie ihn in der Form $xa + yb$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ dar.